www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Concours National d'admission 1989 **ESCAE**

Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible, ...).

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

Il est joint à ce sujet une feuille de papier logarithmique.

MATHÉMATIQUES 2° épreuve

OPTION GÉNÉRALE DURÉE : 4 heures

On rappelle que P(A/B) désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B.

De nombreuses questions sont indépendantes des précédentes ou s'appuient sur des résultats donnés dans l'énoncé.

I. 1° Soit x un nombre réel fixé.

a) Rappeler la valeur de : $\lim_{t \to +\infty} t^{x+1} e^{-t}$.

En déduire :

α) Qu'il existe un réel A strictement positif (que l'on ne demande pas de calculer) tel que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, (t \geqslant A \Rightarrow t^{x+1} e^{-t} \leqslant 1)$$

β) Que $\int_A^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$ est convergente.

b) Étudier suivant les valeurs de x la convergence de $\int_0^A t^{x-1} e^{-t}\, dt$.

c) En déduire que la fonction gamma d'EULER : $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$. est définie pour $x > 0$.

2° *a*) Calculer $\Gamma(1)$.

b) Établir la relation : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$

c) Démontrer que : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$ et en déduire : $\forall p \in \mathbf{N}, \Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right) = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)} \sqrt{\pi}$.

3° *a*) On note : $P(x) = ax^2 + bx + c$

Déterminer (a, b, c) pour que : $P(3) = \Gamma(3)$, $P\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$, $P(4) = \Gamma(4)$

On admettra que P approche Γ sur $[3 ; 4]$.

b) Exprimer, pour $x \in [1 ; 2]$, $\Gamma(x)$ en fonction de $\Gamma(x+2)$.

c) En déduire une approximation de $\Gamma(x)$ à l'aide de P pour $x \in [1 ; 2]$ puis une valeur approchée de $\Gamma(1{,}8)$ à 10^{-4} près.

II. On dit qu'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbf{R}_+$ suit une loi de WEIBULL de paramètres a et b (éléments de $\mathbf{R}_+^*$) et l'on note : $X \hookrightarrow W(a ; b)$ si, et seulement si :

$$\forall t \in \mathbf{R}^+, P(X \leqslant t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{b}\right)^a}$$

A) Dans cette partie, on étudie $X \hookrightarrow W(1 ; b)$.

1° Quelle est la loi classique suivie par X ?

2° Rappeler les valeurs de l'espérance E(X) et de la variance V(X) de X.

3° Calculer le moment centré d'ordre trois de X (espérance de $[X - E(X)]^3$).

4° Soit s et t deux réels strictement positifs.

Calculer : $P(X \geqslant s+t / X \geqslant t)$ et reconnaître la probabilité d'un événement simple.

5° Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi $W(1 ; b)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de :

$X_{(1)} = \max(X_1 ; X_2)$

(pour $\omega \in \Omega$, $X_{(1)}(\omega)$ désigne le plus grand des deux réels $X_1(\omega)$ et $X_2(\omega)$).

b) On note $X_{(2)} = \min(X_1 ; X_2)$

(pour $\omega \in \Omega$, $X_{(2)}(\omega)$ est le plus petit des deux réels $X_1(\omega)$ et $X_2(\omega)$).

Démontrer que $X_{(2)}$ suit $W\left(1 ; \frac{b}{2}\right)$.

Tournez la page S.V.P.

6° Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables indépendantes de même loi $W(1 ; b)$.

a) Montrer que $X_{(n)} = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ suit $W\left(1 ; \frac{b}{n}\right)$.

b) Pour chaque ω de Ω on range les nombres $X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ dans l'ordre décroissant et on note $X_{(k)}(\omega)$ le $k^{\text{ième}}$ de ces nombres.

Déterminer la fonction de répartition de $X_{(k)}$.

B) On suppose maintenant que X suit $W(a ; b)$.

1° Comparer selon les valeurs de a : $P(X \geqslant s+t / X \geqslant t)$ à $P(X \geqslant s)$

Rapprocher ce résultat de celui de II. A) 4°.

2° Montrer que : *a*) $E(X) = b\,\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)$.

b) $V(X) = b^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)\right)^2\right]$

III. On considère un équipement complexe, c'est-à-dire constitué d'un grand nombre de composants tels que la panne d'un seul d'entre eux provoque la panne de l'ensemble. Une unité centrale d'ordinateur (notée UC) est un exemple d'un tel système.

On suppose que les n composants ont des durées de vie (temps de fonctionnement avant la 1re panne) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes suivant toutes la même loi $W(a, b)$.

1° Exprimer la durée de vie T de l'équipement en fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ et montrer qu'elle suit une loi de Weibull dont on déterminera les paramètres.

2° Quelle est la loi de T si $a = 1$?

IV. Le relevé des durées de fonctionnement (en heures) avant la 1re panne de 250 UC a donné les résultats suivants :

i	Classes $]t_{i-1} ; t_i]$	Effectifs n_i
1	]0 ; 16 000]	15
2	]16 000 ; 20 000]	14
3	]20 000 ; 25 000]	25
4	]25 000 ; 28 000]	19
5	]28 000 ; 32 000]	27
6	]32 000 ; 36 000]	29
7	]36 000 ; 42 000]	42
8	]42 000 ; 45 000]	19
9	]45 000 ; 50 000]	25
10	]50 000 ; 60 000]	26
11	]60 000 ; $+\infty$[	9

t_i : limites de classes (en heures)
n_i : effectifs des classes.

On note, pour i entier ($1 \leqslant i \leqslant 10$), F_i la fréquence cumulée de la classe $]t_{i-1} ; t_i]$ et $f_i = -\ln(1 - F_i)$ ($\ln$ désigne le logarithme népérien).

a) Donner la liste des valeurs approchées à 10^{-3} près des f_i pour $1 \leqslant i \leqslant 10$.

b) Représenter le nuage des 10 points $M_i(t_i ; f_i)$ sur la feuille jointe au sujet.

c) En déduire que la durée de vie T suit une loi de Weibull dont on déterminera les paramètres en s'aidant du graphique. (On lira les coordonnées des points de la droite d'ajustement tracée correspondant à $t = 10\,000$ et à $t = 80\,000$. Les coefficients d'une équation de la droite seront donnés à 10^{-2} près).

V. On admet désormais que la durée de vie T d'une UC suit $W(3 ; 40\,000)$.

1° Déduire de I. 3° et de II. B) 2° une valeur approchée (à 1 heure près) de l'espérance mathématique de T (espérance du temps avant la 1re panne, notée MTBF).

2° L'UC est formée de 200 composants dont la durée de vie suit $W(a ; b)$.

Quelles sont, à une unité près, les valeurs de a et b ?

3° Au bout de 2 000 heures, l'ensemble tombe en panne et l'on procède au remplacement du seul composant défectueux.

Quelle est la loi du temps de bon fonctionnement avant la prochaine panne ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail